MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

E est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Soit φ l'application définie dans E par :

$$\varphi(f) = g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = f'(x) - x f(x)$$

Si g est élément de φ (E) on note $\varphi^{-1}(g)$ l'ensemble des éléments f de E tels que $\varphi(f) = g$.

1° Montrer que φ est un endomorphisme de E.

Montrer que si $g \in \varphi$ (E) $\varphi^{-1}(g)$ est l'ensemble des applications f telles que :

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left[C + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} g(t)\, dt \right]$$

C constante quelconque.

L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?

2° L'application composée $\varphi \circ \varphi$ sera notée φ^2 et, plus généralement, on définira φ^n par $\varphi^n = \varphi \circ \varphi^{n-1} = \varphi^{n-1} \circ \varphi$.

Quelle est l'image de f par φ^2 ? Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2xy' + (x^2 - 1)\, y = 0$$

Plus généralement résoudre l'équation $\varphi^n(f) = 0$.

Tournez la page S. V. P.

3° *a.* Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes P de degré au plus égal à n. La restriction de φ à $\mathcal{P}_n$ est-elle un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$?

On note φ_0 la restriction de φ à l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes (sans restriction de degré). Montrer que φ_0 est un endomorphisme de $\mathcal{P}$ injectif mais non surjectif.

On se propose alors de déterminer le sous-espace $\varphi_0(\mathcal{P})$.

b. On pose $I_p(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} t^p\, dt$. Calculer $I_1(x)$. Trouver une relation de récurrence liant $I_p(x)$ et $I_{p-2}(x)$. En déduire qu'il existe un réel λ_k dépendant de k (que l'on précisera) et un polynôme A_k (qu'on ne demande pas de déterminer) tel que :

$$I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-\frac{x^2}{2}} A_k(x).$$

En déduire que tout polynôme impair appartient à $\varphi_0(\mathcal{P})$.

c. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $I_0(x) - P(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ soit une constante. (On ne cherchera pas à calculer $I_0(x)$).

Montrer que $I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-\frac{x^2}{2}} B_k(x)$ (μ_k constante à déterminer, B_k polynôme).

Soit alors Q un polynôme quelconque de $\mathcal{P}$: $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où les a_n sont tous nuls à partir d'un certain rang. Déterminer une condition nécessaire et suffisante dépendant des réels μ_k que doivent vérifier les coefficients a_n pour que $Q \in \varphi_0(\mathcal{P})$.

d. Soit l'espace $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_n \cap \varphi_0(\mathcal{P})$. On considère les deux familles de polynômes :

$$\mathcal{F}_1 = \{x^{2p+1} \ ; \ p \in \mathbb{N}, \ 2p + 1 \leqslant n\}$$

et

$$\mathcal{F}_2 = \{Q_q \ ; \ q \in \mathbb{N}^*, \ 2q \leqslant n\}$$

avec

$$Q_q(x) = x^{2q} - (2q - 1)\, x^{2q-2}$$

et on note $\mathcal{P}''$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_2$.

-2412- AGRO 81

Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $2q \leqslant n$, il existe un polynôme R, vecteur de $\mathfrak{P}'$ tel que $x^{2q} = R(x) + \mu_q$. On pourra remarquer que :

$$\frac{Q_k(x)}{\mu_k} = \frac{x^{2k}}{\mu_k} - \frac{x^{2k-2}}{\mu_{k-1}}$$

et en déduire que $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ est une base de $\mathfrak{P}'$. (On rappelle que tout polynôme est somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair).

4° (Cette question est indépendante de la précédente). Développer en série entière l'application :

$$x \longmapsto (1 + x^2)\, e^{x^2}.$$

Soit $a_n\, x^n$ le développement en série entière de la fonction f, solution de l'équation $\varphi(f) = (1 + x^2)\, e^{x^2}$, qui s'annule avec x. Déterminer les coefficients a_n.

(On pourra poser $a_{2p+1} = \frac{u_p}{p!}$ et rechercher d'abord les premiers coefficients).

En déduire l'intégrale

$$\int_0^x (1 + t^2)\, e^{\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail